AULA DO DIA 13/01/2016

(2) $V \equiv$ e.v. real

$$\begin{aligned} \mathbf{0} : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \mathbf{0}(v) = 0_V \end{aligned}$$ é a transf. nula

(3) Fixe $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto T(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{aligned}$$ é o produto escalar

entre x e c. T é transf. linear.

(4) $V \equiv$ e.v. real, $\lambda \in \mathbb{R}$ fixo

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto T(v) = \lambda v \end{aligned}$$

é contração se $|\lambda| < 1$, [redacted] expansão se $|\lambda| > 1$.

Nos dois casos T é uma transf. linear.

(5) $\mathcal{C}([a,b])$, $\mathcal{C}^1([a,b])$

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}^1([a,b]) &\longrightarrow \mathcal{C}([a,b]) \\ f &\longmapsto T(f) = f' \end{aligned}$$

onde $T(f)(x) = f'(x)$ $\forall x \in [a,b]$ é transf. linear.

42

Teorema 14: Sejam V e W espaços vetoriais com $\dim(V) = n$, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base para V e $w_1, \dots, w_n \in W$. Então, existe uma única transformação linear $T: V \to W$ tal que

$$T(v_j) = w_j \quad , \quad \text{para } j = 1, \dots, n.$$

Demonstração:

1º Existência da transformação:

Defina
$$T: V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto T(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tq $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Veja que T está bem definida e $T(v_i) = w_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n$.

2º: T é linear:

Sejam $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \in V$, onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, i = 1, \dots, n$. Então

$$(\cdot)\; T(u+v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) w_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i = T(u) + T(v).$$

$$(\cdot\cdot)\; T(\lambda u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda(\alpha_i v_i)\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i) v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i) w_i$$

$= \rightarrow$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \lambda T(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in V.$$

Portanto T é linear.

3º: T é única.

Suponha que exista outra transformação $P: V \to W$ tal que $P(v_i) = w_i$, $\forall\, i = 1, \dots, n$. Assim se $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$, então

$$P(u) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = T(u).$$

Como u é qualquer $T = P$.

Exemplos:

(1) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por

$$T(1,0) = 1 - x$$
$$T(0,1) = 1 - x^2$$

define uma TL.

(2) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

$$T(1,1) = x$$
$$T(-1,1) = x - x^3$$

define uma TL.

NÚCLEO E IMAGEM DE UMA TRANSF. LINEAR

<u>Definição 16</u>: Sejam V e W espaços vetoriais reais e $T: V \to W$ transformação linear. O conjunto

$$Im(T) = \{w \in W : w = T(v) \text{ para algum } v \in V\}$$

é denominado <u>imagem</u> da transf. linear T.

<u>Definição 17</u>: Sejam V e W espaços vetoriais reais e $T: V \to W$ uma transformação linear. O conjunto:

$$Ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0_V\}$$

é denominado núcleo da transformação T.

<u>Teorema 15</u>: Sejam V, W espaços vetoriais reais e $T: V \to W$ transformação linear. Então

a) $Ker(T) \subset V$ é subespaço vetorial de V

b) $Im(T) \subset W$ é subespaço vetorial de W

<u>Demonstração</u>:

a) $T(0_V) = 0_W$ (Exercício da próxima lista), logo $0_V \in Ker(T)$.

b) Se $u, v \in Ker(T)$, então $T(u) = 0_W$ e $T(v) = 0_W$

logo $T(u+v) = T(u) + T(v) = 0_W + 0_W = 0_W$. Logo $u+v \in Ker(T)$.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in Ker(T)$, então $T(u) = 0_W$, logo $T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda \cdot 0_W = 0_W$. Portanto $\lambda u \in Ker(T)$.

b) ok!

Exemplos : Det núcleo e imagem:

(1) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto T(x,y) = 3x + 2y$ contas..

(2) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longmapsto T(x,y,z) = (x - 3y + 5z, -x + 4y - z)$

contas..

(3) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

$T(1,0,1) = 2 + x^2 + x^3$

$T(0,1,0) = 1 + x^2$

$T(0,0,1) = x^2 - x^3$

Base para $Ker(T)$ e $Im(T)$?

POSTO E NULIDADE AULA DO DIA 14/04/2016

Definição 18: Sejam V e W espaços vetoriais reais, e $T: V \to W$ uma transformação linear. Definimos:

a) o posto de T, como sendo a dimensão de $Im(T)$.

b) a nulidade de T, como sendo a dimensão de $Ker(T)$.

<u>Definição 19</u>: Sejam V, W espaços vetoriais reais, e $T: V \to W$ uma aplicação. Dizemos que T é <u>injetora</u> se, para cada $u, v \in V$ com $u \neq v$ tem-se $T(u) \neq T(v)$. De modo equivalente, T é injetora se para cada $u, v \in V$ com $T(u) = T(v)$, implicar que $u = v$.

<u>Definição 20</u>: Sejam V e W espaços vetoriais reais, e $T: V \to W$ uma aplicação. Dizemos que <u>T é sobrejetora</u> se para todo $w \in W$, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$, ou seja, $Im(T) = W$.

<u>Teorema 15</u>: Sejam V, W espaços vetoriais reais, $T: V \to W$ uma transformação linear. Então, T é injetora se, e somente se, $Ker(T) = \{0_V\}$.

<u>Demonstração</u>:

($\Rightarrow$) Suponha que T é injetora e seja $u \in Ker(T)$. Então $T(u) = 0_W$. Como $T(0_V) = 0_W$, então $T(0_V) = T(u)$. Por hipótese T é injetora, logo $u = 0_V$. Portanto $Ker(T) = \{0_V\}$

($\Leftarrow$) Suponha que $Ker(T) = \{0_V\}$. Sejam $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$. Então

$0_W = T(u) - T(v) = T(u-v)$. Logo $u - v \in Ker(T)$. Por isso

$u - v = 0_V$, ou seja $u = v$. Portanto

T é injetora.

<u>Teorema 16</u>: Sejam V e W, espaços vetoriais reais ~~de~~ dimensão finita e $T: V \to W$ uma transformação linear. Então:

$$\dim(V) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$$

<u>Demonstração</u>: Suponha que $\dim(V) = n$. Sem perda de generalidade suponha que $Ker(T)$ é subespaço próprio de V. Do <u>Corolário 5</u>, $Ker(T)$ é de dimensão finita e $\dim(Ker(T)) < \dim(V)$. Seja $\{v_1, \dots, v_m\}$ uma base de $Ker(T)$. O <u>Teorema 12</u> nos garante que $\{v_1, \dots, v_m\}$ é parte de uma base de V. Assim, $\exists\, v_{m+1}, \dots, v_n \in V$ tq $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ é base de V.

<u>1°</u>: $S = \{T(v_{m+1}), \dots, T(v_n)\}$ é base de $Im(T)$.

Verifiquemos que S gera $Im(T)$. Seja $w \in Im(T)$. Então $\exists\, u \in V$ tal que $w = T(u)$. Como $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ é base de V e $u \in V$, então $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

48

$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Logo

$$W = T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i \underbrace{T(v_i)}_{= 0_W} + \sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i T(v_i)$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i T(v_i).$$

Então w é combinação linear de $\{T(v_{m+1}), \dots, T(v_n)\}$

Ou seja $Im(T) = [T(v_{m+1}), \dots T(v_n)]$.

Mostraremos que S é L.I.

Considere a combinação linear nula dos elementos de S:

$$\alpha_{m+1}T(v_{m+1}) + \dots + \alpha_n T(v_n) = 0_W \Rightarrow$$

$$T\left(\sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i v_i\right) = 0_W.$$

Chame de $v = \sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i v_i$. Então $v \in Ker(T)$.

Como $\{v_1, \dots, v_m\}$ é base para $Ker(T)$, então 49

$\exists\ \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ tais que:

$$v = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i$$

Logo, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i = \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i v_i$, e assim

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i - \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i v_i = 0_V$$

Como $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ é base de V então $\beta_i = 0 \quad \forall\ i = 1, \dots, m$ e $\alpha_i = 0 \quad \forall\ i = m+1, \dots, n$

Ou seja S é LI. Portanto uma base de $Im(T)$.

Note que:

$$\begin{cases} \dim Ker(T) = m \\ \dim Im(T) = n - m \\ \dim(V) = n \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \dim(V) = n &= n + m - m \\ &= m + (n - m) \\ &= \dim Ker(T) + \dim Im(T). \end{aligned}$$

Definição 21: Sejam V e W espaços vetoriais reais e $T: V \to W$ uma aplicação. Dizemos que T é bijetora se, T for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Exemplos: (1) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \longmapsto T(x,y,z) = -x+y+2z$$

Então $\ker(T) = [(1,1,0);\ (2,0,1)]$, $\dim \ker(T) = 2$.

Do Teorema 16 $\dim \operatorname{Im}(T) = 1 = \dim \mathbb{R}$. Pela Proposição 3, $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}$.

(2) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto T(x,y) = (2x-y,\ x+y)$$ é injetora.

(3) $T: \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

$$p(x) \longmapsto T(p(x)) = x^2 p''(x)$$

$\ker(T) = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ $\quad \operatorname{Im}(T) = [x^2, x^3]$

AULA DO DIA 15/09/2016

51

(4) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z,t) = (x-2y+t,\ 2x+y-z,\ 5y-z-2t)$

$\beta_{Ker(T)} = \left\{ \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 1, 0\right) ; \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0, 1\right) \right\}$

$\beta_{Im(T)} = \{(1,2,0) ; (0,-1,-1)\}$

Base do $\mathbb{R}^4$ que contenha $\beta_{Ker(T)}$?

(5) Seja T um operador linear em $\mathbb{R}^3$ tq

$T(1,0,0) = (1,1,1)$

$T(0,1,0) = (1,-2,1)$

$T(0,0,1) = (1,0,-1)$

T é bijetora!

(6) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear

tal que $T(1,0,0) = (1,1,1)$ $T(0,1,0) = (1,-2,1)$

$T(0,0,1) = (1,0,-1)$

T é bijetor?

(7) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto T(x,y) = (x-y,\ x,\ x+y)$

T é bijetor?

(8) Determine uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $Im(T) = [(1,1,2,1), (2,1,0,1)]$

Sol:

$\dim(Im(T)) = 2 \implies \dim(Ker(T)) = 1$

Logo

$$T(1,0,0) = (0,0,0,0)$$
$$T(0,1,0) = (1,1,2,1)$$
$$T(0,0,1) = (2,1,0,1)$$

(9) Determine uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ de modo que $\dim(Ker(T)) = 1$

Sol: $\dim Ker(T) = 1 \implies \dim Im(T) = 2$

$$T(1,0,0) = 0$$
$$T(0,1,0) = x$$
$$T(0,0,1) = x^2$$

(10) Determine uma transformação linear $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $Ker(T) = [(1,0,1,0); (0,1,0,1)]$

Sol: $\dim Ker(T) = 2 \implies \dim Im(T) = 2$

$$\beta = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$$

$T(1,0,1,0) = (0,0,0,0)$ $\quad$ $T(0,1,0,0) = (1,0,0,0)$

$T(0,1,0,1) = (0,0,0,0)$ $\quad$ $T(0,0,1,0) = (0,1,0,0)$

52

ISOMORFISMOS

Definição 21: Sejam V e W e.v. reais. Uma transformação linear $T: V \to W$ bijetora é denominada isomorfismo de V em W.

Quando existe um isomorfismo $T: V \to W$ dizemos que eles são isomorfos, e notaremos por $V \cong W$.

Definição 22: Sejam V e W e.v. reais. Uma transformação linear $T: V \to W$ é inversível se existir $S: W \to V$ tal que $T \circ S = I_W$ e $S \circ T = I_V$. Nesse caso S é chamada aplicação inversa de T e é denotada por T^{-1}.

Exemplos

① $V = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : A = \begin{bmatrix} a & a+b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$V \cong \mathbb{R}^3$?

Defina $T: V \to \mathbb{R}^3$

$A \mapsto T(A) = (a, a+b, c)$

T é um isomorfismo

② $T: \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$

$$(x,y) \longmapsto T(x,y) = x + (x+y)t$$

T é um isomorfismo e

$T^{-1}: \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ é ~~o isom~~ a inversa.

$$(x+yt) \longmapsto (x, y-x)$$

<u>Teorema 17</u>. Seja V um e.v. real, com $\dim(V) = n$. Então $V \cong \mathbb{R}^n$.

<u>Demonstração</u>: Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V.

Defina:

$$T: V \to \mathbb{R}^n$$
$$v \mapsto T(v) = (c_1, \ldots, c_n)$$

onde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ são as coordenadas do elemento v em relação à base β. Note que $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$, logo T é injetora. Do Teorema do Núcleo e Imagem,

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$$
$$= 0 + \dim \mathrm{Im}(T)$$

Logo,

$$\dim \mathbb{R}^n = n = \dim V = \dim \mathrm{Im}(T)$$

Assim $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^n$, e com isso T é sobrejetora. Portanto T é um isomorfismo.

<u>Teorema 18</u>: Sejam V, W e.v. reais de dimensão finita. Então $V \cong W$ se, e somente se, $\dim(V) = \dim(W)$.

<u>Demonstração</u>:

($\Rightarrow$) Suponha que $V \cong W$, e considere $T: V \to W$ isomorfismo. Então $\ker(T) = \{0_V\}$ e $\mathrm{Im}(T) = W$.

Pelo Teorema do Núcleo e Imagem:

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim \ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T) \\ &= 0 + \dim W \implies \dim V = \dim W. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Suponho que $\dim V = \dim W$. Sejam $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V e $\{w_1, \ldots, w_n\}$ base de W. Defina $T: V \to W$ por:

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \quad , \text{ onde } v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i .$$

T é injetora! Do teorema do núcleo e imagem

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim \ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T) \\ \underbrace{n}_{\dim W} &= 0 + \dim \mathrm{Im}(T) \implies \mathrm{Im}(T) = W. \end{aligned}$$

Logo T é sobrejetora. Portanto T é um isomorfismo.